Teoría de Juegos

Estrategias Mixtas

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

2023-1

Teoría de Juegos
Estrategias Mixtas

- Estrategias Mixtas
  - Introducción
    - Forma estratégica
  - Extensión Mixta
  - Cálculo en juegos 2x2
  - Resultados generales
  - Ejemplos
  - Aplicación
- Estrategias de Comportamiento
  - Introducción
  - Ejemplo
  - Equivalencia
  - Inducción inversa
- Próximas atracciones

- En varias situaciones se puede considerar escoger al azar.
- No significa dejar la elección al azar, si no diseñar el azar para elegir la acción a tomar.
  - Un ejemplo motivador es el Yan Ken Po
  - Para estudiar este tipo de comportamiento formalizaremos las llamadas "estrategias mixtas"
  - Dejaremos la interpretación para más adelante.

- Consideremos un juego en forma normal reducida

$$\langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$$

asumiendo que los pagos π_i permiten construir la utilidad esperada para evaluar loterías sobre los resultados.

- Trabajaremos con conjuntos S_i finitos y llamaremos a sus elementos **estrategias puras** para diferenciarlas de las:

Definición (Estrategias mixtas)

Dado el juego $\langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$ *una* **estrategia mixta** *para el jugador* i *es una distribución de probabilidad sobre* S_i.

⊙ *Denotaremos por* σ_i, *de manera genérica, a una estrategia mixta y por* Σ_i *al conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador* i.

Ejemplo

- Consideremos un juego con dos jugadores y cada uno con $S_1 = \{a, b, c\}$ y $S_2 = \{x, y\}$

⊙ Una estrategia mixta para el jugador 1 será un vector
$\sigma_1 = (\sigma_1(a), \sigma_1(b), \sigma_1(c))$
tal que $\sigma_1(a), \sigma_1(b), \sigma_1(c) \geq 0$ y $\sigma_1(a) + \sigma_1(b) + \sigma_1(c) = 1$.

- El conjunto de todas las estrategias mixtas para 1 será

$$\Sigma_1 = \{(\sigma_1(a), \sigma_1(b), \sigma_1(c)) \mid \sigma_1(a), \sigma_1(b), \sigma_1(c) \geq 0 \ , \ \sigma_1(a) + \sigma_1(b) + \sigma_1(c) = 1\} = \Delta^2$$

⊙ Una estrategia mixta para el jugador 2 será un vector

$$\sigma_2 = (\sigma_2(x), \sigma_2(y))$$

- El conjunto de todas las estrategias mixtas para 2 será

$$\Sigma_2 = \{(\sigma_2(x), \sigma_2(y)) \mid \sigma_2(x), \sigma_2(y) \geq 0 \ , \ \sigma_2(x) + \sigma_2(y) = 1\} = \Delta^1$$

- Para continuar fijemos un poco de notación:

⊙ Si $\sigma_i \in \Sigma_i$ y $s_i \in S_i$ entonces $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad asignada por σ_i a s_i

⊙ $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$

⊙ $\sigma \in \Sigma$, esto es $\sigma = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ es un perfil de estrategias mixtas.

⊙ Para toda $\sigma \in \Sigma$ y $s \in S$

$$\sigma(s) = \sigma_1(s_1) \times \cdots \times \sigma_n(s_n)$$

es la probabilidad de que se realice el perfil s si los jugadores usan el perfil σ.

Ejemplo

- Para el juego con dos jugadores y $S_1 = \{a, b, c\}$ y $S_2 = \{x, y\}$
- El perfil de estrategias

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = ((\sigma_1(a), \sigma_1(b), \sigma_1(c)), (\sigma_2(x), \sigma_2(y)))$$

genera las probabilidades, por ejemplo:

$$\sigma((a, x)) = \sigma_1(a) * \sigma_2(x)$$
$$\sigma((c, y)) = \sigma_1(c) * \sigma_2(y)$$

- Dado el juego $\langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$ si permitimos que los jugadores puedan usar estrategias mixtas el resultado generado por un perfil $\sigma \in \Sigma$ es aleatorio y tenemos que usar las utilidades esperadas:

$$\Pi_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\pi_i(s)$$

Definición (Extensión Mixta)

Dado el juego $G = \langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$ *su* **extensión mixta** *es el juego:*

$$G^m = \langle I, (\Sigma_1, \ldots \Sigma_n), (\Pi_1, \ldots \Pi_n) \rangle$$

Definición (Equilibrio en Estrategias Mixtas)

Dado el juego G un **equilibrio de Nash en estrategias mixtas** *es un equilibrio de Nash de su extensión mixta G^m*

⟅

Teorema (Nash, 1951)

Todo juego $\langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$ finito (I y cada S_i finitos) tiene al menos un equilibrio de NAsh en estrategias mixtas

- Notemos que toda estrategia $s_i \in S_i$ corresponde a una estrategia mixtas σ_i con $\sigma_i(s_i) = 1$ y $\sigma_i(s_i') = 0$ para todo $s_i' \neq s_i$

⊙ De esta forma las estrategias puras son casos (degenerados) de estrategias mixtas y los perfiles de estrategias puras son también perfiles de estrategias mixtas.

⊙ Entonces todo equilibrio de Nash en estrategias puras es también un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

⊙ Un juego finito entonces tiene tres posibilidades para su conjunto de equilibrios de Nash:

1. Solo EN en estrategias puras (p.e. Dilema del Prisionero)
2. Solo EN en estrategias mixtas (p.e. YKP)
3. En de los dos tipos (p.e. BS)

- Veamos cómo calcular EN en estrategias mixtas para el caso de un juego con dos jugadores y dos estrategias para cada uno, $S_1 = \{A, B\}$ y $S_2 = \{I, D\}$

⊙ Usaremos el método de la mejor respuesta

⊙ Para simplificar la notación usaremos

$$\Sigma_1 = \{(p, 1-p) \mid 0 \leq p \leq 1\}$$

$$\Sigma_2 = \{(q, 1-q) \mid 0 \leq q \leq 1\}$$

y escribiremos

$$\Pi_1(p,q) = pq\pi_1(A,I)+p(1-q)\pi_1(A,D)+(1-p)q\pi_1(B,I)+(1-p)(1-q)\pi_1(B,D)$$

$$\Pi_2(p,q) = pq\pi_2(A,I)+p(1-q)\pi_2(A,D)+(1-p)q\pi_2(B,I)+(1-p)(1-q)\pi_2(B,D)$$

- Haremos el análisis de la mejor respuesta para el jugador 1
- Abusando de la notación escribimos:

$$\Pi_1(A, q) = q\pi_1(A, I) + (1 - q)\pi_1(A, D)$$

$$\Pi_1(B, q) = q\pi_1(B, I) + (1 - q)\pi_1(B, D)$$

- Así podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pi_1(p, q) &= p\Pi_1(A, q) + (1 - p)\Pi_1(B, q) \\ &= p\left(\Pi_1(A, q) - \Pi_1(B, q)\right) + \Pi_1(B, q) \end{aligned}$$

- Lo que hay que observar es que el pago esperado es lineal en p y es sencillo encontrar su máximo y por lo tanto la mejor respuesta del jugador 1.

- Lo que hay que observar es que el pago esperado es lineal en p

$$\Pi_1(p,q) = p\left(\Pi_1(A,q) - \Pi_1(B,q)\right) + \Pi_1(B,q)$$

y es sencillo encontrar su máximo y por lo tanto la mejor respuesta del jugador 1.

- Así podemos escribir

$$MR_1(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Pi_1(A,q) > \Pi_1(B,q) \\ [0,1] & \text{si} \quad \Pi_1(A,q) = \Pi_1(B,q) \\ 0 & \text{si} \quad \Pi_1(A,q) < \Pi_1(B,q) \end{cases}$$

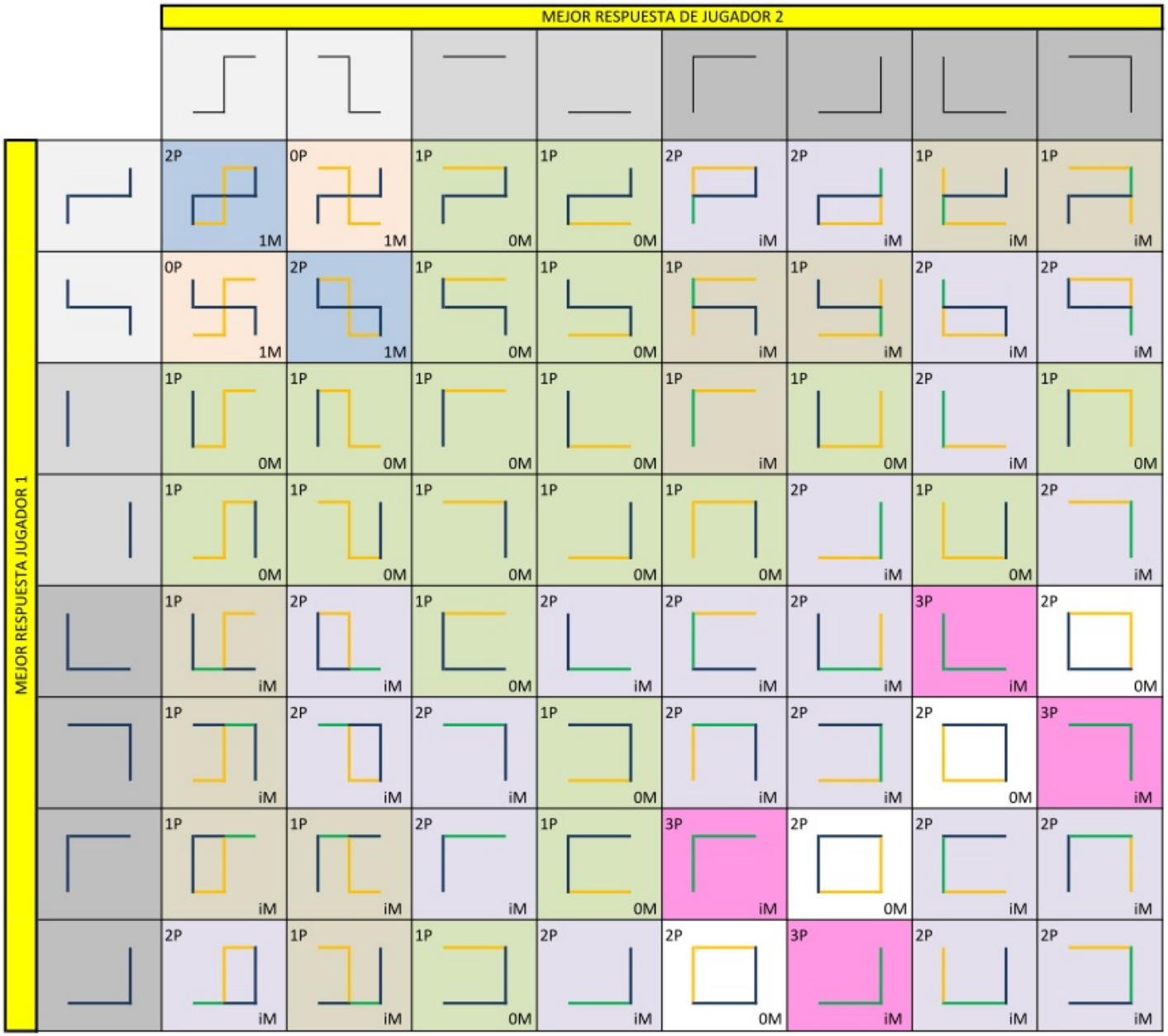
- Notemos que: $\Pi_1(A,q) = \Pi_1(B,q)$ equivale a

$$q\pi_1(A,I) + (1-q)\pi_1(A,D) = q\pi_1(B,I) + (1-q)\pi_1(B,D)$$

que puede tener o no solución para $0 \leq q \leq 1$

- Podemos hacer lo mismo para el jugador 2

$$MR_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Pi_2(p, I) > \Pi_2(p, D) \\ [0, 1] & \text{si} \quad \Pi_2(p, I) = \Pi_2(p, D) \\ 0 & \text{si} \quad \Pi_2(p, I) < \Pi_2(p, D) \end{cases}$$


MEJOR RESPUESTA DE JUGADOR 2
MEJOR RESPUESTA JUGADOR 1
2P 1M
0P 1M
1P 0M
1P 0M
2P iM
2P iM
1P iM
1P iM
0P 1M
2P 1M
1P 0M
1P 0M
1P iM
1P iM
2P iM
2P iM
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P iM
1P 0M
2P iM
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P iM
2P iM
1P 0M
2P iM
1P 0M
2P 1M
1P 0M
1P 0M
1P iM
1P iM
2P iM
2P iM
1P iM
1P iM
2P iM
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P 0M
1P iM
2P iM
1P 0M
2P iM
1P 0M
2P iM
2P iM
1P 0M
2P iM
2P iM
3P iM
2P 0M
1P iM
2P iM
2P iM
1P 0M
2P iM
2P iM
2P 0M
3P iM
1P iM
1P iM
2P iM
1P 0M
3P iM
2P 0M
2P iM
2P iM
2P iM
1P iM
1P iM
0M
2P iM
2P 0M
3P iM
2P iM
2P iM

- Si en un EN un jugador está jugando una estrategia mixta entonces
  - Todas las estrategias que reciben probabilidad positiva tienen el mismo pago esperado, dadas las estrategias de los otros jugadores. Este es el pago esperado del jugador.
  - Toda estrategia que recibe probabilidad cero tiene pago esperado menor o igual al pago esperado de las que reciben probabilidad positiva, dadas las estrategias de los otros jugadores

⊙ Un estrategia pura estrictamente dominada por otra, no recibe probabilidad positiva en ningún EN

Matching Pennies

	H	T
H	1,-1	-1,1
T	-1,1	1 ,-1

- No tiene EN en estrategias puras, ¿ lo debe tener en mixtas
- Tiene un EN en mixtas $((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$

BS

	B	S
B	1,2	0,0
S	0,0	2,1

- Tiene dos Equilibrios de Nash en estrategias puras (B,B) y (S,S)

⊙ Tiene, además, un equilibrio en estrategias mixtas:
$((1/3, 2/3), (2/3, 1/3))$

Halcón-Paloma

	Pal	Hal
Pal	1,1	0,2
Hal	2,0	1-c,1-c

- Si $c < 1$: el único equilibrio es (Hal,Hal), por estrategias dominantes.
- Si $c > 1$: además de (Pal,Hal) y (Hal,Pal) tenemos un equilibrio con estrategias mixtas $((1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{c}), (1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{c}))$
- Observe que conforme c es mayor, es más probable de observar (Pal,Pal).

Yan Ken Po

	Ti	Pi	Pa
Ti	0,0	-1,1	1,-1
Pi	1,-1	0,0	-1,1
Pa	-1,1	1,-1	0,0

- No tiene Equilibrio de Nash en estrategias puras.
- El único Equilibrio de Nash es en estrategias mixtas, donde cada jugador escoge cualquier acción con probabilidad 1/3.

Golden Balls

	Split	Steal
Split	50,50	0,100
Steal	100,0	0,0

- Tiene 3 EN en estrategias puras
- Tiene infinitos EN en mixtas (degeneradas)

Inspección en un entorno Principal-Agente

	I	NI
T	W-E,G-W-C	W-E, G-W
NT	0,-C	W,-W

- Asumiendo $G > W > E > C > 0$, no hay un Equilibrio de Nash en estrategias puras.
- Debe haberlo en estrategias mixtas:
  - El Agente decide trabajar con probabilidad

$$Prob(T) = 1 - \frac{C}{W}$$

  - El Principal decide inspeccionar con probabilidad

$$Prob(I) = \frac{E}{W}$$

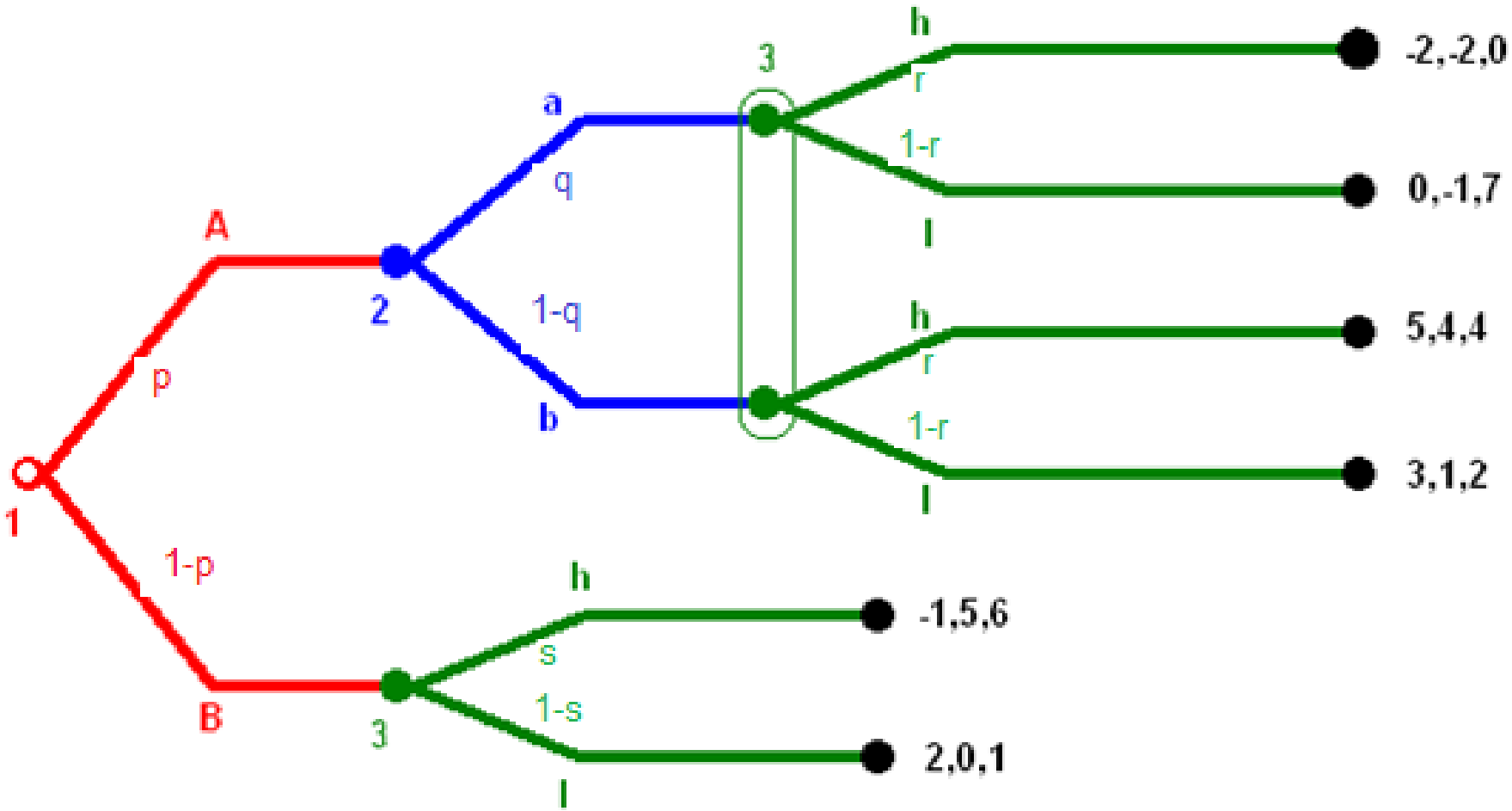
- Si tenemos un juego en forma extensiva podemos pasar a la forma estratégica y de ahí a su extensión mixta.

⊙ Entonces también tenemos estrategias mixtas para los juegos en forma extensiva

⊙ Pero podemos también trabajar con la estructura de la forma extensiva y una forma más simple y natural de modelar las jugadas aleatorias.

Definición (Estrategias de comportamiento)

Dado un juego en forma extensiva, una **estrategia de comportamiento** *para el jugador i determina en cada conjunto de información del jugador una distribución de probabilidad sobre las acciones disponibles.*


1
A
p
2
a
q
3
h
r
-2,-2,0
1-r
l
0,-1,7
1-q
b
h
r
5,4,4
1-r
l
3,1,2
1-p
B
3
h
s
-1,5,6
1-s
l
2,0,1

- Es bastante obvio que a cada estrategia de comportamiento le corresponde una estrategia mixta

⊙ Con un poco más de esfuerzo podemos ver que cada estrategia mixta induce una estrategia de comportamiento. ≀

Teorema (Kuhn, 1953)

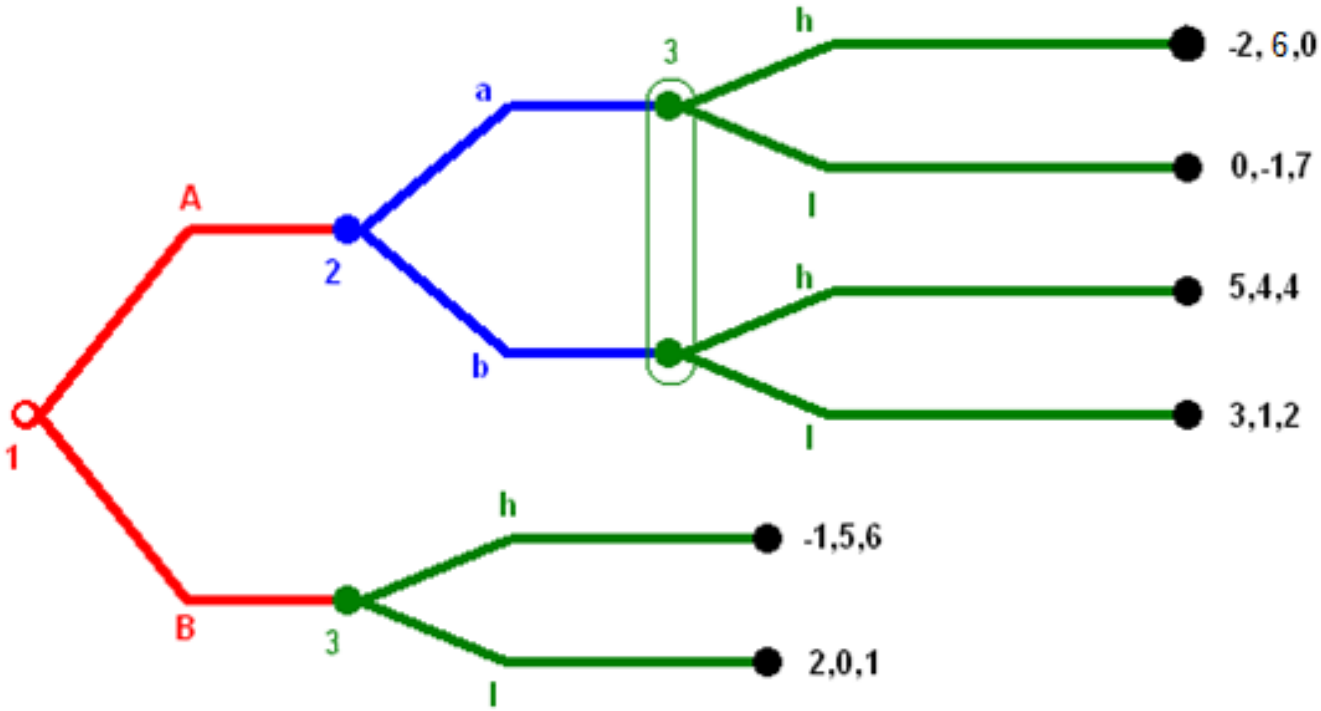
Para juegos en forma extensiva con memoria perfecta, estrategias mixtas y estrategias de comportamiento son equivalentes.

- Para juegos en forma extensiva con información perfecta vimos que siempre existía al menos un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (encontrado por inducción inversa).

⊙ Para estos juegos, la posibilidad de usar estrategias de comportamiento solo aumentan, eventualmente, el número de ENPSJ.

⊙ Para juegos con información imperfecta, la existencia de ENPSJ no está garantizada si solo usamos estrategias puras.

⊙ Pero si usamos estrategias de comportamiento, para juegos finitos, siempre tendremos al menos un ENPSJ

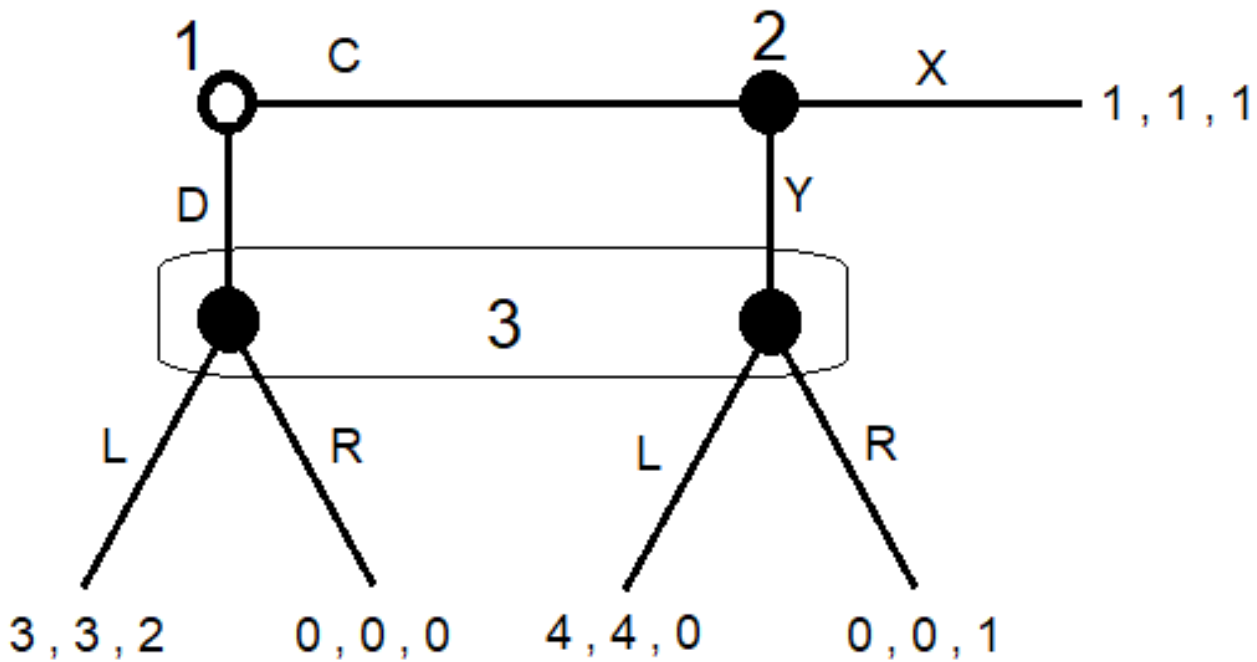


- El subjuego entre 2 y 3:

	h	l
a	$6,0$	$-1,7$
b	$4,4$	$1,2$

no tiene EN en estrategias puras

Selten's Horse



- No tiene subjuegos propios, por lo tanto todo EN (por lo menos hay uno) es ENPSJ.

	C	
	L	R
X	$1,1,1$	$1,1,1$
Y	$4,4,0$	$0,0,1$

	D	
	L	R
X	$3,3,2$	$0,0,0$
Y	$3,3,2$	$0,0,0$

- Dos EN (en puras): (C, X, R) y (D, X, L)